



DECKBLATT

Projekt	PSP-Element	Obj. Kenn.	Funktion	Komponente	Baugruppe	Aufgabe	UA	Lfd. Nr.	Rev.
N A A N	NNNNNNNNNN	NNNNNN	NN A A A N N	A A N N N A	A A N N	X A A X X	A A	N N N N	N N
9K		---	---	---	---	EGA	ED	0001	00

Titel der Unterlage BGR-Bericht: Hydraulische Höhen um ein aufgelassenes Bergwerk (Archiv-Nr. 103.797, Sept. 1988) (lfd. nr. 291)	Seite I.
	Stand Sept. 1988
Ersteller BGR	Textnummer

Stempelfeld

PSP-Element TP 2: 9K/2122422 9K/212853		zu Plan-Kapitel: 3.1.10.3 und 3.9.3	
		PL  9K/2122422 Freigabe für Behörden	PL  9K/212853 Freigabe im Projekt

Diese Unterlage unterliegt samt Inhalt dem Schutz des Urheberrechts sowie der Pflicht zur vertraulichen Behandlung auch bei Beförderung und Vernichtung und darf vom Empfänger nur auftragsbezogen genutzt, vervielfältigt und Dritten zugänglich gemacht werden. Eine andere Verwendung und Weitergabe bedarf der ausdrücklichen Zustimmung der PTB.



REVISIONSBLATT

Projekt	PSP-Element	Obj. Kenn.	Funktion	Komponente	Baugruppe	Aufgabe	UA	Lfd. Nr	Rev
N A A N	NNNNNNNNNN	NNNNNN	NNAAAANN	AANNNA	AANN	XAXXX	AA	NNNN	NN
9K		---	---	---	---	EGA	ED	0001	00

Titel der Unterlage: BGR-Bericht: Hydraulische Höhen um aufgelassenes Bergwerk
(Archiv-Nr. 103.797, Sept. 1988)
(lfd. Nr. 291)

Seite
II.
Stand
Sept. 1988

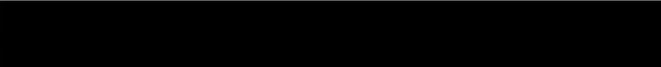
Rev.	Revisionsst. Datum	verant. Stelle	Gegenzeichn. Name	rev. Seite	Kat. *)	Erläuterung der Revision

*) Kategorie R = redaktionelle Korrektur
Kategorie V = verdeutlichende Verbesserung
Kategorie S = substantielle Änderung
Mindestens bei der Kategorie S müssen Erläuterungen angegeben werden.

BUNDESANSTALT FÜR GEOWISSENSCHAFTEN UND ROHSTOFFE

HANNOVER

Hydraulische Höhen um ein aufgelassenes Bergwerk

1. Sachbearbeiter: 
2. Datum: September 1988
3. Archiv-Nr.: 103.797
4. Tagebuch-Nr.: 11.912

Inhalt	Seite
1. Aufgabenstellung	1
2. Modellbeschreibung und Vorgehensweise	1
3. Wahl der Eingabedaten und Darstellung der Ergebnisse	2
4. Literatur	9
Anhang 1:	
Zwei Anfangsrandwertprobleme des endlichen Brunnens	10
A1.1 Der endliche Brunnen mit konstanter Spiegelabsenkung	10
A1.2 Der endliche Brunnen mit konstanter Entnahmerate	12
Anhang 2:	
Zur praktischen Berechnung der Funktionen des endlichen Brunnens	13
A2.1 Die erste Funktion des endlichen Brunnens	13
A2.2 Die Ortsableitung der ersten Funktion des endlichen Brunnens am Brunnenrand	16
A2.3 Die zweite Funktion des endlichen Brunnens	19

1. Aufgabenstellung

Im Rahmen der Untersuchungen der Eignung aufgelassener Bergwerke als Endlagerstandorte muß die Auswirkung der während der Betriebszeit des Bergwerkes erzeugten Anomalie der hydraulischen Höhe auf den Austrag der eingelagerten Abfälle mit dem Grundwasser betrachtet werden. Solange eine solche Anomalie, eine lokale Absenkung der hydraulischen Höhe, ein Absenkungstrichter, genügend tief ist, können im Porenwasser gelöste Abfallstoffe nicht aus dem Gebiet des Absenkungstrichters entkommen. Der Betrag des regionalen geohydraulischen Gradienten spielt dabei eine Rolle.

Im vorliegenden Bericht wird anhand von Prinzipbetrachtungen untersucht, mit welcher Geschwindigkeit sich Anomalien der hydraulischen Höhe in einem gespannten Aquifer ausgleichen. Der prinzipielle Ablauf des Ausgleichsvorganges wird an einem einfachen hydraulischen Modell demonstriert.

2. Modellbeschreibung und Vorgehensweise

Betrachtet wird ein gespannter, homogener Modellaquifer, der im Hangenden und Liegenden durch undurchlässige Schichten begrenzt ist und in der Ebene als unbeschränkt angesehen wird. Wie in /5/ dient als Modell des Bergwerkes ein den Aquifer vollständig durchörternder, zylindrischer Hohlraum von endlichem Radius.

Weil die Modellierung des in der Nachbetriebsphase zulaufenden Absenkungstrichters die Kenntnis seiner Gestalt zu Ende der Betriebsphase voraussetzt, muß zunächst die Gestalt des Absenkungstrichters zu diesem Zeitpunkt erarbeitet werden. Die dazu erforderlichen Überlegungen erfolgen in drei Schritten.

Im ersten Schritt wird die Betriebsphase des Bergwerkes im Modell nachgebildet. Dazu wird eine zeitlich konstante Absenkung h_0 der hydraulischen Höhe vorgegeben und der Absenkungstrichter im Aquifer zu Ende der Betriebsphase wird berechnet. Weiterhin wird die Zuflußrate zum Hohlraum (Bergwerk) während der Betriebsphase bestimmt. Bei der hier untersuchten Parameterkombination zeigt sich, daß bis auf Anfangseffekte die Zuflußrate nahezu plateauförmig verläuft.

Im zweiten Schritt wird im Hohlraum (Bergwerk) über die Betriebsdauer hin statt der konstanten Absenkung diese konstante Zuflußrate als Entnahmerate vorgegeben und wieder wird der Absenkungstrichter im Aquifer zu Ende der Betriebsphase bestimmt. Die Modellrechnungen zeigen gute Übereinstimmung zwischen dem durch konstante Spiegelabsenkung und dem durch konstante Entnahmerate erzeugten Absenkungstrichter. Daher ist es für den nachfolgenden Auffüllvorgang nicht von Belang, ob der Absenkungstrichter durch Vorgabe einer konstanten Spiegelabsenkung oder konstanten Entnahmerate im Hohlraum erzeugt wurde. Formal ergibt sich durch diese Vorgehensweise jedoch der Vorteil, im nächsten Schritt das Superpositionsprinzip anwenden zu können, wenn man mit konstanter Entnahme im zweiten Schritt rechnet.

Im dritten Schritt wird durch Superposition mit einem an gleicher Stelle gelegenen Hohlraum, in den ab Ende der Betriebsphase die zuvor genannte Rate injiziert wird, die Entnahme im Hohlraum ab Ende der Betriebsphase zu Null gesetzt. Zustrom in den Hohlraum findet theoretisch nicht mehr statt, die hydraulische Höhe im Aquifer steigt wieder an. Dadurch wird die Nachbetriebsphase des Bergwerkes modelliert.

Bei dieser Vorgehensweise wird allerdings unterstellt, daß nach Beendigung der Betriebsphase kein weiteres Wasser in den Hohlraum (das Bergwerk) tritt. Dies ist mit Hinblick auf den zeitlichen Verlauf des Auffüllens des Absenkungstrichters jedoch als konservativ zu werten.

3. Wahl der Eingabedaten und Darstellung der Ergebnisse

Folgende Eingabedaten liegen den Modellrechnungen zugrunde:

Charakteristische Daten des Modellaquifers:

Mächtigkeit	H =	200 m
Durchlässigkeit	$k_d =$	10^{-9} m/s
Spez. Ergiebigkeit	$S' =$	10^{-6} 1/m

Charakteristische Daten des Hohlraumes:

Hohlraumradius	$r_w =$	300 m
Absenkung der hydr. Höhe	$h_o =$	1000 m
Dauer der Absenkung	$t_o =$	50 a

Zur formalen Beschreibung der den Modellrechnungen zugrunde liegenden Problemstellungen, den verwendeten Lösungsformeln und ihrer numerischen Realisierung sei auf die Anhänge verwiesen.

Entsprechend der im zweiten Abschnitt beschriebenen Vorgehensweise wurde zunächst der Absenkungstrichter um einen Hohlraum mit 300 m Radius bestimmt, in dem für 50 a eine konstante Absenkung der hydraulischen Höhe von 1000 m erzeugt wurde. Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 1 dargestellt (Kurvenverlauf 'Konstante hydraulische Höhe'). Abb. 2 zeigt die zeitliche Entwicklung des Wasserzustroms in den Hohlraum. Die Rate stellt sich nach etwa 10 a Betriebsdauer auf etwa 40 l/min ein und weist von da ab nur noch eine schwach fallende Tendenz auf.

Statt der konstanten Absenkung der hydraulischen Höhe wurde im nächsten Schritt über 50 a hin im Hohlraum eine konstante Entnahmerate von 40 l/min vorgegeben und die Absenkung der hydraulischen Höhe im Aquifer zu Ende dieses Zeitraumes bestimmt. Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 1 (Kurvenverlauf 'Konstante Rate') dargestellt. Es zeigt sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen beiden Absenkungstrichtern, so daß in den folgenden Überlegungen davon ausgegangen wird, daß der Absenkungstrichter zu Ende der Betriebsphase durch konstante Entnahme von 40 l/min über die Betriebsdauer von 50a erzeugt wurde.

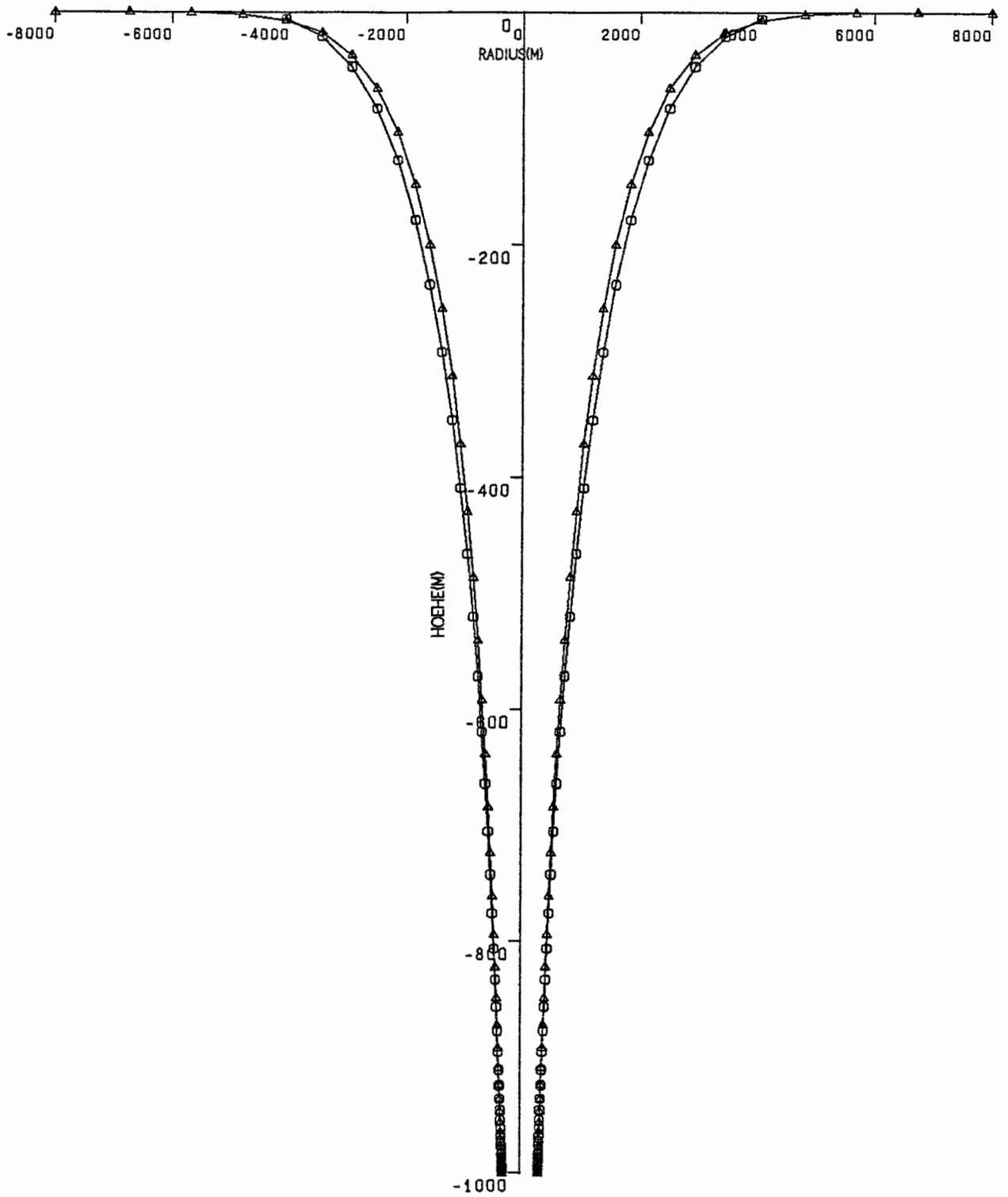
Abb. 3 zeigt in Abständen von 100 a die Gestalt des zulaufenden Absenkungstrichters nach Ende der Betriebsphase des Bergwerkes. Man beachte den gegenüber Abb. 1 veränderten Maßstab der Ordinate.

In Abb. 4 ist dem zulaufenden Absenkungstrichter noch ein regionaler hydraulischer Gradient von $4 \cdot 10^{-3}$ überlagert, der Abstrom ist nach rechts im Bild zu denken, der Nullpunkt des überlagernden Potentials wurde willkürlich im Zentrum des Hohlraumes angenommen. Die Darstellung ist so gewählt, daß der Vertikalschnitt durch das Minimum des Absenkungstrichters führt und der überlagerte regionale hydraulische Gradient in Bildebene von links nach rechts verläuft. Man beachte hierbei, daß bedingt durch den überlagerten regionalen hydraulischen Gradienten keine Zylindersymmetrie des Absenkungstrichters mehr gegeben ist.

Die Darstellung zeigt, daß während des Auffüllvorganges das Minimum des Absenkungstrichters in Richtung des Abstromes wandert und daß schon nach etwa 400 a seit Ende der Betriebsphase kein Minimum der hydraulischen Höhe mehr existiert.

Aus den beschriebenen Ergebnissen folgt, daß im Rahmen der zugrundeliegenden Modellvorstellung aus der Existenz einer lokalen Anomalie der hydraulischen Höhe keine zusätzliche Sicherheit für ein Endlager am Ort der Anomalie abgeleitet werden darf.

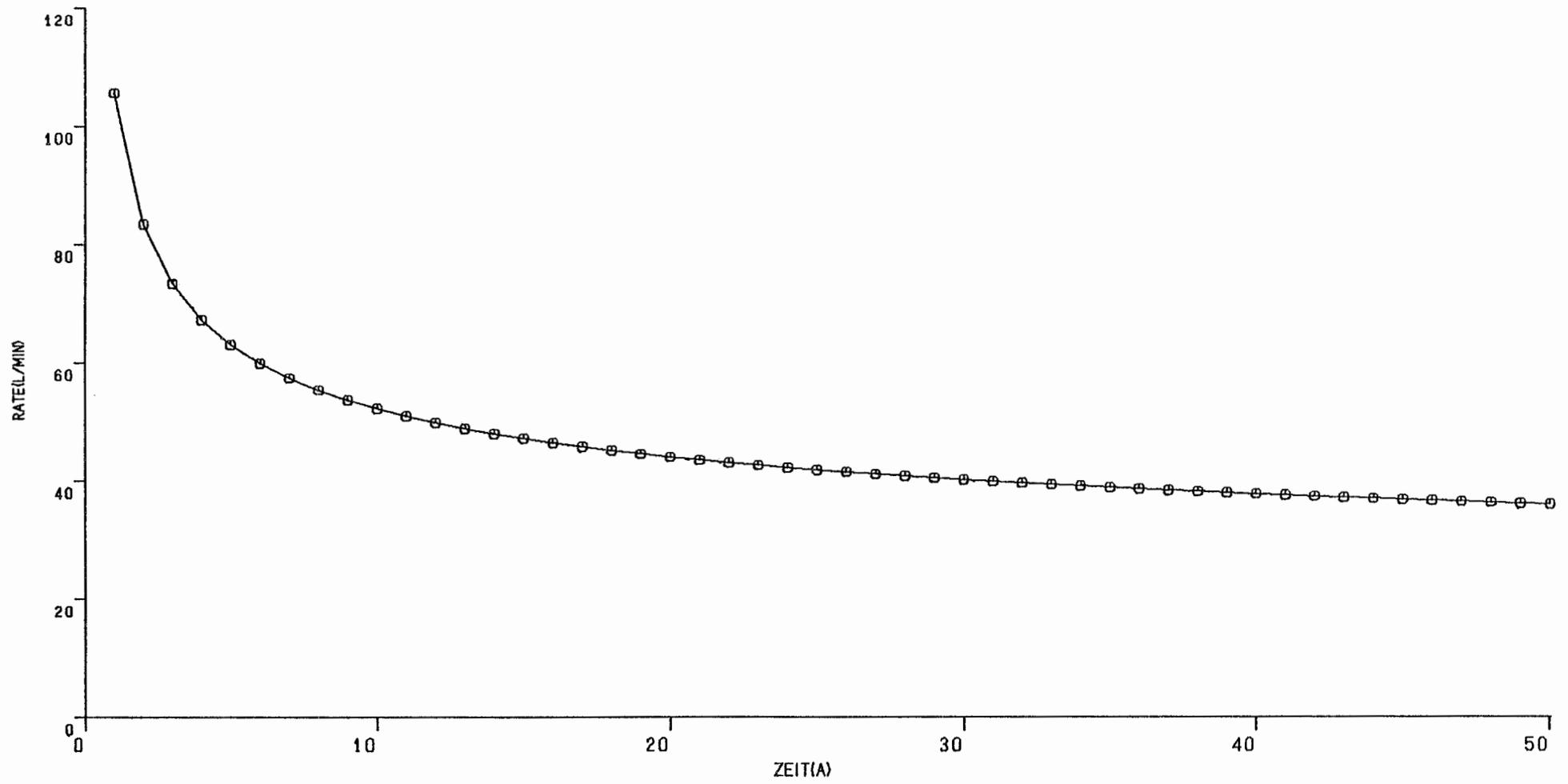
ABSENKUNG DER HYDRAULISCHEN HOEHE AM ENDE DER BETRIEBSPHASE



□ KONSTANTE HYDRAULISCHE HOEHE
△ KONSTANTE RATE

Abb. 1

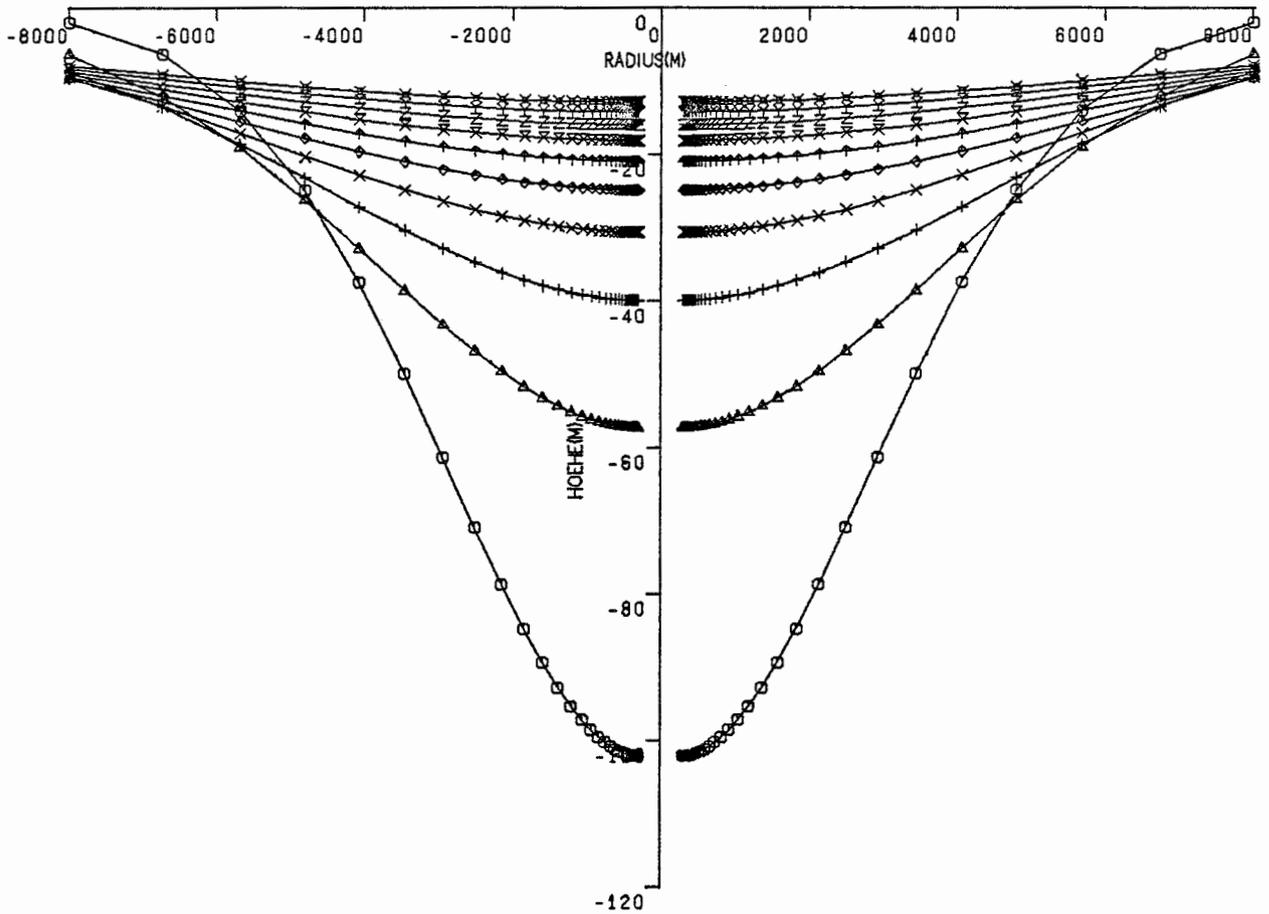
ZEITLICHER VERLAUF DER RATE



— 5 —

Abb. 2

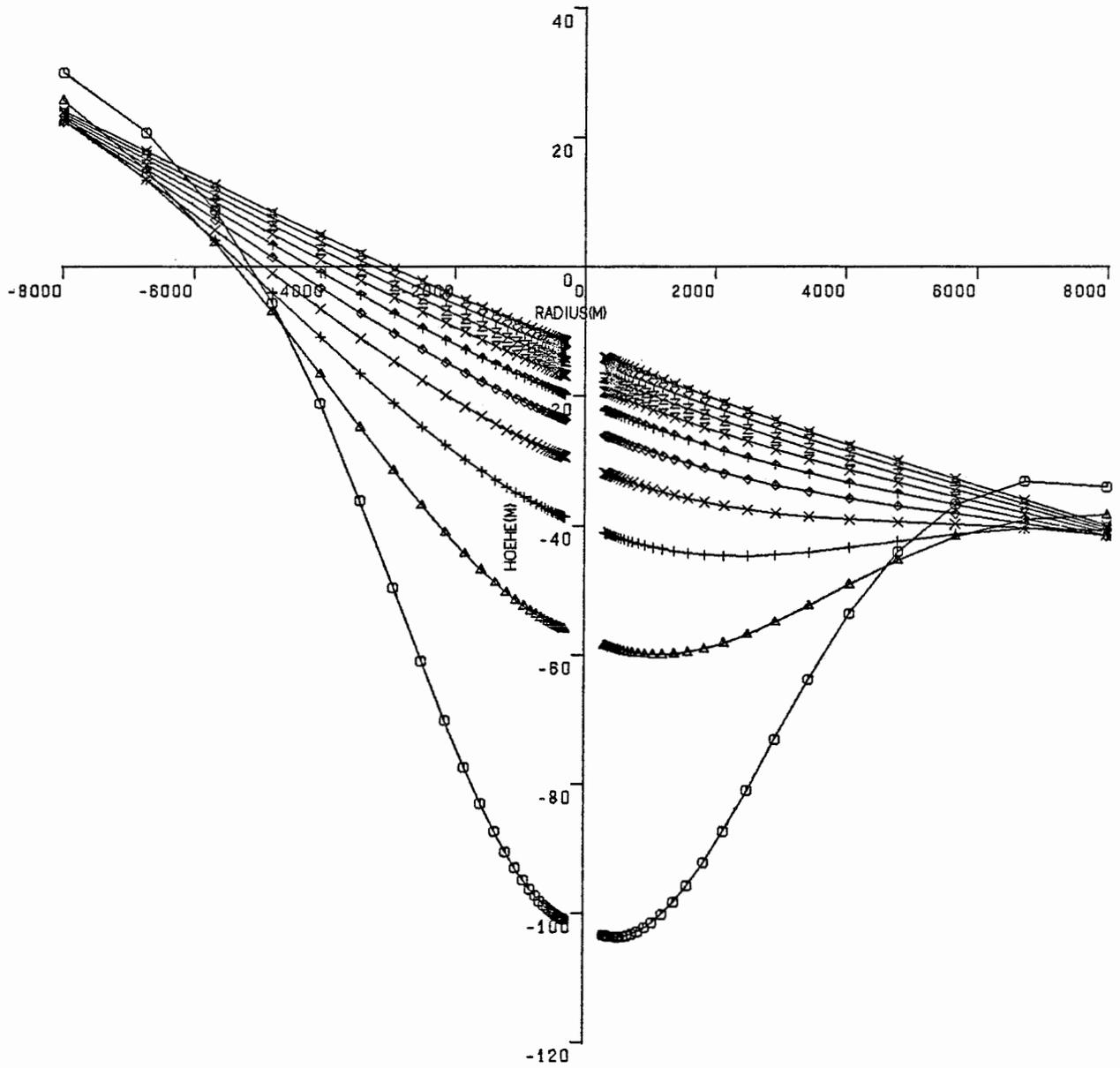
ABSENKUNG DER HYDRAULISCHEN HOEHE IN DER NACHBETRIEBSPHASE



○	NACH 100 JAHREN
△	NACH 200 JAHREN
+	NACH 300 JAHREN
x	NACH 400 JAHREN
◇	NACH 500 JAHREN
□	NACH 600 JAHREN
×	NACH 700 JAHREN
⊕	NACH 800 JAHREN
⋈	NACH 900 JAHREN
*	NACH 1000 JAHREN

Abb. 3

NACHBETRIEBSPHASE: HYDR. HOEHE BEI REGIONALEM HYDR. GRADIENTEN



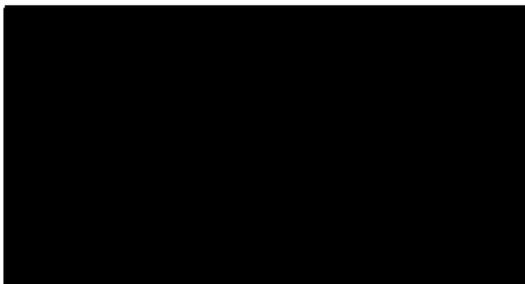
○	NACH 100 JAHREN
△	NACH 200 JAHREN
+	NACH 300 JAHREN
×	NACH 400 JAHREN
◇	NACH 500 JAHREN
⊕	NACH 600 JAHREN
⊗	NACH 700 JAHREN
∩	NACH 800 JAHREN
∪	NACH 900 JAHREN
⊘	NACH 1000 JAHREN

Abb. 4

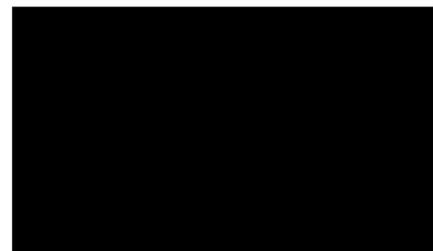
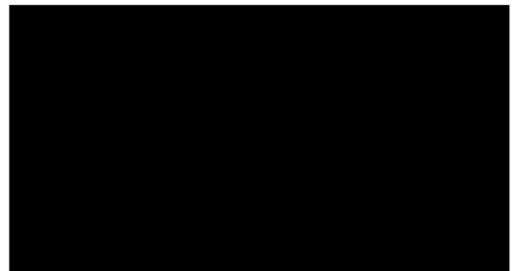
BUNDESANSTALT FÜR GEOWISSENSCHAFTEN UND ROHSTOFFE

HANNOVER

Im Auftrage:



Sachbearbeiter:



4. Literatur

- /1/ Carslaw, H. S.;
J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, 2nd ed.
Clarendon Press, Oxford, 1959
- /2/ Cooper, H. H.;
J. D. Bredehoeft;
I. S. Papadopoulos: Response of a Finite - Diameter Well
to an Instantaneous Charge of Water
Water Resourc. Research, 3(1967)1,
S. 263 - 269
- /3/ Hantush, M. S.: Hydraulics of Wells
in
Advances in Hydrosience
(Herausgeber: Ven Te Chow)
1(1964), S. 281 - 432
- /4/ Papadopoulos, I. S.;
H. H. Cooper: Drawdown in a Well of Large Diameter
Water Resourc. Research, 3(1967)1,
S. 241 - 244
- /5/ Delisle, G.;
W. Giesel;
F. Schildknecht: Zur Abschätzung der Durchlässigkeit
des Oxford im Bereich der Grube
Konrad
BGR-Bericht, Archiv-Nr. 99.426

Anhang 1

Zwei Anfangsrandwertprobleme des endlichen Brunnens

A1.1 Der endliche Brunnen mit konstanter Spiegelabsenkung

Ein Brunnen mit dem endlichen Radius r_w habe einen homogenen und isotropen Aquifer (Durchlässigkeit k_f , spezifische Ergiebigkeit S' , Mächtigkeit H) vollständig durchteuft. Beginnend zum Zeitpunkt $t=0$ werde in dem Brunnen die konstante Spiegelabsenkung h_0 aufrecht erhalten. Gesucht ist die Spiegelabsenkung $h(r,t)$ im Aquifer zu Zeiten $t>0$.

Die Aufgabenstellung wird formal beschrieben durch die parabolische Differentialgleichung

$$(A1.1 - 1) \quad k_f \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = S' \frac{\partial h}{\partial t},$$

die mit der Abkürzung

$$(A1.1 - 2) \quad \chi = \frac{k_f}{S'}$$

die Gestalt

$$(A1.1 - 3) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial h}{\partial t}$$

annimmt. Die Anfangs- und Randbedingungen lauten

$$(A1.1 - 4) \quad h(r,0) = 0 \quad \text{für } r > r_w$$

$$(A1.1 - 5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} h(r,t) = 0$$

$$(A1.1 - 6) \quad h(r_w, t) = h_0$$

Die Lösung des durch (A1.1 - 3) bis (A1.1 - 6) formulierten Anfangsrandwertproblems ist aus der Literatur bekannt.

$$(A1.1 - 7) \quad h(r,t) = h_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\chi t u^2} \frac{\gamma_0(ur) \gamma_0(ur_w) - \gamma_0(ur) \gamma_0(ur_w)}{\gamma_0^2(ur_w) + \gamma_0^2(ur_w)} \frac{du}{u} \right)$$

Die Substitution

$$(A1.1 - 8) \quad \xi = u \sqrt{w}$$

überführt (A1.1 - 7) in

$$(A1.1 - 9) \quad h(r,t) = h_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x t}{r w} \xi^2} \frac{J_0\left(\xi \frac{r}{r_w}\right) Y_0(\xi) - Y_0\left(\xi \frac{r}{r_w}\right) J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi} \right).$$

Führt man noch durch

$$(A1.1 - 10) \quad A(R,T) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-T \xi^2} \frac{J_0(\xi R) Y_0(\xi) - Y_0(\xi R) J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi}$$

die erste Funktion des endlichen Brunnens ein, so erhält man für die Spiegelabsenkung im Aquifer

$$(A1.1 - 11) \quad h(r,t) = h_0 A\left(\frac{r}{r_w}, \frac{x t}{r_w^2}\right).$$

Von Interesse ist noch die Zuflußrate zum Brunnen. Sie errechnet sich als

$$(A1.1 - 12) \quad Q = -2\pi r_w H K_f \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=r_w} = -2\pi H K_f h_0 \left. \frac{\partial A}{\partial R} \right|_{R=1}.$$

Damit kommt der Ortsableitung der ersten Funktion des endlichen Brunnens noch Bedeutung zu. Wegen

$$(A1.1 - 13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial R} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-T \xi^2} \frac{-\xi J_1(\xi R) Y_0(\xi) + \xi Y_1(\xi R) J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-T \xi^2} \frac{J_1(\xi R) Y_0(\xi) - Y_1(\xi R) J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(A1.1 - 14) \quad \begin{aligned} \left. \frac{\partial A}{\partial R} \right|_{R=1} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-T \xi^2} \frac{J_1(\xi) Y_0(\xi) - Y_1(\xi) J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} d\xi \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-T \xi^2} \frac{1}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

A1.2 Der endliche Brunnen mit konstanter Entnahmerate

Ein Brunnen mit dem endlichen Radius r_w habe einen homogenen und isotropen Aquifer (Durchlässigkeit k_f , spezifische Ergiebigkeit S' , Mächtigkeit H) vollständig durchteuft. Beginnend zum Zeitpunkt $t=0$ werde in dem Brunnen die konstante Entnahmerate Q aufrecht erhalten. Gesucht ist die Spiegelabsenkung $h(r,t)$ im Aquifer zu Zeiten $t>0$.

Die Aufgabenstellung wird formal beschrieben durch die parabolische Differentialgleichung

$$(A1.2 - 1) \quad k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = S' \frac{\partial h}{\partial t} \quad |$$

die mit der Abkürzung

$$(A1.2 - 2) \quad \kappa = \frac{k_f}{S'}$$

die Gestalt

$$(A1.2 - 3) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial h}{\partial t}$$

annimmt. Die Anfangs- und Randbedingungen lauten

$$(A1.2 - 4) \quad h(r,0) = 0 \quad \text{für } r > r_w$$

$$(A1.2 - 5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} h(r,t) = 0$$

$$(A1.2 - 6) \quad \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=r_w} = - \frac{Q}{2\pi r_w H k_f}$$

Die Lösung des durch (A1.2 - 3) bis (A1.2 - 6) formulierten Anfangsrandwertproblems ist aus der Literatur bekannt.

$$(A1.2 - 7) \quad h(r,t) = \frac{Q}{4\pi H k_f} S\left(\frac{r}{r_w}, \frac{\kappa t}{r_w^2}\right),$$

wobei die zweite Funktion des endlichen Brunnens gegeben ist durch

$$(A1.2 - 8) \quad S(R,T) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - e^{-T\xi^2}) \frac{J_1(\xi) Y_0(\xi R) - Y_1(\xi) J_0(\xi R)}{J_1^2(\xi) + Y_1^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^2} .$$

Anhang 2

Zur praktischen Berechnung der Funktionen des
endlichen Brunnens

A2.1 Die erste Funktion des endlichen Brunnens

Das zur Berechnung des in

$$(A2.1 - 1) A(R, T) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-T\xi^2} \frac{J_0(R\xi)Y_0(\xi) - Y_0(R\xi)J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi}$$

auftretenden unendlichen Integrales anzuwendende Verfahren wird entscheidend von dem Verhalten des Integranden an den Grenzen des Integrationsbereiches bestimmt. An der oberen Grenze, also für $\xi \rightarrow \infty$, nimmt der Integrand wegen der asymptotischen Darstellung der BESSELFunktionen

$$(A2.1 - 2.1) J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

$$(A2.1 - 2.2) Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} (A2.1 - 3) e^{-T\xi^2} \frac{J_0(R\xi)Y_0(\xi) - Y_0(R\xi)J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{1}{\xi} \\ \approx e^{-T\xi^2} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi R\xi}} \cos\left(R\xi - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi R\xi}} \sin\left(R\xi - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{2}{\pi\xi} \left[\cos^2\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \right]} \frac{1}{\xi} \\ = \frac{\frac{2}{\pi\xi} \frac{1}{R\xi}}{\frac{2}{\pi}} e^{-T\xi^2} \left[\cos\left(R\xi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(R\xi - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ = \frac{e^{-T\xi^2}}{\xi R} (-) \sin\left(\left(R\xi - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ = \frac{e^{-T\xi^2}}{\xi R} (-) \sin\left(\xi(R-1)\right). \end{aligned}$$

Aus der letzten Darstellung wird ersichtlich, daß die obere Grenze ξ_{\max} des numerisch signifikanten Bereiches des Integranden durch die auftretende Exponentialfunktion bestimmt

wird. Sie wird praktisch Null wenn ihr Argument kleiner als -25 ausfällt. Daraus ergibt sich sofort

$$(A2.1 - 4) \quad \xi_{\max} = \frac{5}{\sqrt{T}}$$

An der unteren Grenze, also für $\xi \rightarrow 0$, besitzt der Integrand eine analytisch hebbare Singularität. Wählt man ξ_{\min} derart, daß

$$(A2.1 - 5.1) \quad 0 < \xi_{\min} \leq \frac{0,1}{\sqrt{T}}$$

und

$$(A2.1 - 5.2) \quad 0 < \xi_{\min} \leq \frac{0,01}{R}$$

gilt, so wird für $0 < \xi \leq \xi_{\max}$

$$(A2.1 - 6.1) \quad e^{-T\xi^2} \approx 1$$

$$(A2.1 - 6.2) \quad J_0(R\xi) \approx 1$$

$$(A2.1 - 6.3) \quad J_0(\xi) \approx 1$$

$$(A2.1 - 6.4) \quad Y_0(\xi) \approx \frac{2}{\pi} \ln \xi$$

$$(A2.1 - 6.5) \quad Y_0(\xi R) \approx \frac{2}{\pi} \ln(\xi R)$$

Für das Integral von 0 bis ξ_{\min} erhält man somit

$$(A2.1 - 7) \quad \int_0^{\xi_{\min}} e^{-T\xi^2} \frac{J_0(\xi R) Y_0(\xi) - Y_0(\xi R) J_0(\xi)}{J_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \int_0^{\xi_{\min}} \frac{\frac{2}{\pi} \ln(\xi) - \frac{2}{\pi} \ln(\xi R)}{1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \ln^2 \xi} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln R \int_0^{\xi_{\min}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \ln^2 \xi} \frac{d\xi}{\xi}$$

Substitution: $u = \ln \xi \Rightarrow du = \frac{d\xi}{\xi} \left| \begin{array}{l} \xi \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow -\infty \\ \xi \rightarrow \xi_{\min} \Rightarrow u \rightarrow \ln \xi_{\min} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\pi}{2} \ln R \int_{-\infty}^{\ln \xi_{\min}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + u^2} du \\
 &= -\frac{\pi}{2} \ln R \left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \arctan \frac{u}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right]_{-\infty}^{\ln \xi_{\min}} \\
 &= -\ln R \left[\arctan \left(\frac{2}{\pi} \ln \xi_{\min} \right) + \frac{\pi}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Für die praktische Rechnung wird die erste Funktion des endlichen Brunnens also

$$\begin{aligned}
 \text{(A2.1 - 8)} \quad A(R, T) &= 1 + \frac{2}{\pi} \left\{ -\ln R \left[\arctan \left(\frac{2}{\pi} \ln \xi_{\min} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} e^{-T\xi^2} \frac{\gamma_0(\xi R) \gamma_0(\xi) - \gamma_0(\xi R) \gamma_0(\xi)}{\gamma_0^2(\xi) + \gamma_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi} \right\}
 \end{aligned}$$

wobei ξ_{\min} und ξ_{\max} den in (A2.1 - 4) und (A2.1 - 5) genannten Bedingungen genügen.

Das verbleibende Integral von ξ_{\min} bis ξ_{\max} wird numerisch behandelt. Wegen (A2.1 - 3) besitzt der Integrand etwa

$$\text{(A2.1 - 9)} \quad n = \left[1 + \frac{\xi_{\max}(R-1)}{\pi} \right]$$

Vorzeichenwechsel. Daher bietet es sich an, das Integrationsintervall von ξ_{\min} bis ξ_{\max} in eine mindest ebensolche (besser noch höhere) Anzahl von Teilintervallen zu zerlegen. Auf jedem Teilintervall wird dann die Berechnung des Integrales mit gängigen Integrationsroutinen vorgenommen.

A2.2 Die Ortsableitung der ersten Funktion des

 endlichen Brunnens am Brunnenrand

Das zur Berechnung des in

$$(A2.2 - 1) \quad \left. \frac{\partial A}{\partial R} \right|_{R=1} = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-T\xi^2} \frac{1}{Y_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi}$$

auftretenden unendlichen Integrales anzuwendende Verfahren wird entscheidend von dem Verhalten des Integranden an den Grenzen des Integrationsbereiches bestimmt. An der oberen Grenze, also für $\xi \rightarrow \infty$, nimmt der Integrand wegen der asymptotischen Darstellung der BESSELFunktionen

$$(A2.2 - 2.1) \quad Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

$$(A2.2 - 2.2) \quad Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

folgende Gestalt an:

$$(A2.2 - 3) \quad e^{-T\xi^2} \frac{1}{Y_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{1}{\xi}$$

$$\approx e^{-T\xi^2} \frac{1}{\frac{2}{\pi\xi} \left[\cos^2\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \right]} \frac{1}{\xi}$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-T\xi^2}$$

Aus der letzten Darstellung wird ersichtlich, daß die obere Grenze ξ_{\max} des numerisch signifikanten Bereichs des Integranden durch die auftretende Exponentialfunktion bestimmt wird. Sie wird praktisch Null wenn ihr Argument kleiner als -25 ausfällt. Daraus ergibt sich sofort

$$(A2.2 - 4) \quad \xi_{\max} = \frac{5}{\sqrt{T}} .$$

An der unteren Grenze, also für $\xi \rightarrow 0$, besitzt der Integrand eine analytisch hebbare Singularität. Wählt man ξ_{\min} derart, daß

$$(A2.2 - 5.1) \quad 0 < \xi_{min} \leq \frac{0,1}{\sqrt{T}}$$

und

$$(A2.2 - 5.2) \quad 0 < \xi_{min} \leq 0,01$$

gilt, so wird für $0 < \xi \leq \xi_{min}$

$$(A2.2 - 6.1) \quad e^{-T\xi^2} \approx 1$$

$$(A2.2 - 6.2) \quad \gamma_0(\xi) \approx 1$$

$$(A2.2 - 6.3) \quad \gamma_0(\xi) \approx \frac{2}{\pi} \ln \xi$$

Für das Integral von 0 bis ξ_{min} erhält man somit

$$(A2.2 - 7) \quad \int_0^{\xi_{min}} e^{-T\xi^2} \frac{1}{\gamma_0^2(\xi) + \gamma_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \int_0^{\xi_{min}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \ln^2 \xi} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^{\xi_{min}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \ln^2 \xi} \frac{d\xi}{\xi}$$

Substitution: $u = \ln \xi \Rightarrow du = \frac{d\xi}{\xi} \quad \left| \begin{array}{l} \xi \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow -\infty \\ \xi \rightarrow \xi_{min} \Rightarrow u \rightarrow \ln \xi_{min} \end{array} \right.$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\ln \xi_{min}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + u^2} du$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \arctan \frac{u}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right]_{-\infty}^{\ln \xi_{min}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\arctan \left(\frac{2}{\pi} \ln \xi_{min} \right) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Für die praktische Rechnung wird die Ortsableitung der ersten Funktion des endlichen Brunnens am Brunnenrand also

$$(A2.2 - 8) \quad \left. \frac{\partial A}{\partial R} \right|_{R=1} = -\frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\arctan \left(\frac{2}{\pi} \ln \xi_{\min} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \right. \\ \left. + \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} e^{-T\xi^2} \frac{1}{Y_0^2(\xi) + Y_0^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi} \right\}$$

wobei ξ_{\min} und ξ_{\max} den in (A2.2 - 4) und (A2.2 - 5) genannten Bedingungen genügen.

Das verbleibende Integral von ξ_{\min} bis ξ_{\max} wird numerisch behandelt. Wegen (A2.2 - 3) besitzt der Integrand etwa

$$(A2.2 - 9) \quad n = \left[1 + \frac{\xi_{\max}}{\pi} \right]$$

leichte Schwingungen. Daher bietet es sich an, das Integrationsintervall von ξ_{\min} bis ξ_{\max} in eine mindest ebensolche (besser noch höhere) Anzahl von Teilintervallen zu zerlegen. Auf jedem Teilintervall wird dann die Berechnung des Integrales mit gängigen Integrationsroutinen vorgenommen.

A2.3 Die zweite Funktion des endlichen Brunnens

Das zur Berechnung des in

$$(A2.3 - 1) \quad S_{CRIT} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - e^{-T\xi^2}) \frac{J_1(\xi) Y_0(\xi R) - Y_1(\xi) J_0(\xi R)}{J_1^2(\xi) + Y_1^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

auf tretenden unendlichen Integrales anzuwendende Verfahren wird entscheidend von dem Verhalten des Integranden an den Grenzen des Integrationsbereiches bestimmt. An der unteren Grenze, also für $\xi \rightarrow 0$, verhält sich der Integrand regulär. Wegen

$$(A2.3 - 2.1) \quad e^{-Tx^2} \approx 1 - Tx^2 \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

$$(A2.3 - 2.2) \quad J_1(x) \approx \frac{1}{2}x \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

$$(A2.3 - 2.3) \quad J_0(xR) \approx 1 \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

$$(A2.3 - 2.4) \quad Y_0(xR) \approx \frac{2}{\pi} \ln(xR) \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

$$(A2.3 - 2.5) \quad Y_1(x) \approx \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

nimmt der Integrand folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} (A2.3 - 3) \quad & (1 - e^{-T\xi^2}) \frac{J_1(\xi) Y_0(\xi R) - Y_1(\xi) J_0(\xi R)}{J_1^2(\xi) + Y_1^2(\xi)} \frac{1}{\xi^2} \\ & \approx (1 - 1 + T\xi^2) \frac{\frac{1}{2} \xi \frac{2}{\pi} \ln(\xi R) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi}}{\frac{1}{4} \xi^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\xi^2}} \frac{1}{\xi^2} \\ & = T \frac{\frac{1}{\pi} \xi^3 \ln(\xi R) - \frac{2}{\pi} \xi}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{4} \xi^4} \end{aligned}$$

Aus der letzten Darstellung wird ersichtlich, daß der Integrand

für $\xi \rightarrow 0$ gegen Null strebt.

An der oberen Grenze, also für $\xi \rightarrow \infty$, ist das in (A2.3 - 1) auftretende Integral im wesentlichen auf den Integralsinus S_i zurückführbar. Wählt man ξ_{max} derart, daß

$$(A2.3 - 4.1) \quad \xi_{max} \geq \frac{5}{\sqrt{R}}$$

und

$$(A2.3 - 4.2) \quad \xi_{max} \geq 20$$

gilt, so wird für $\xi > \xi_{max}$

$$(A2.3 - 5.1) \quad e^{-T\xi^2} \approx 0$$

$$(A2.3 - 5.2) \quad \gamma_0(\xi R) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \xi R}} \cos(\xi R - \frac{\pi}{4})$$

$$(A2.3 - 5.3) \quad \gamma_1(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \cos(\xi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$(A2.3 - 5.4) \quad \gamma_0(\xi R) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \xi R}} \sin(\xi R - \frac{\pi}{4})$$

$$(A2.3 - 5.5) \quad \gamma_1(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \sin(\xi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

Für das Integral von ξ_{max} bis ∞ erhält man somit

$$(A2.3 - 6) \quad \int_{\xi_{max}}^{\infty} (1 - e^{-T\xi^2}) \frac{\gamma_1(\xi) \gamma_0(\xi R) - \gamma_1(\xi) \gamma_0(\xi R)}{\gamma_1^2(\xi) + \gamma_1^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= \int_{\xi_{max}}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \cos(\xi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{2}{\pi \xi R}} \sin(\xi R - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \sin(\xi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{2}{\pi \xi R}} \cos(\xi R - \frac{\pi}{4})}{\frac{2}{\pi \xi} [\cos^2(\xi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + \sin^2(\xi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})]} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R}} \int_{\xi_{max}}^{\infty} \left(\cos(\xi - \frac{3}{4}\pi) \sin(\xi R - \frac{\pi}{4}) - \sin(\xi - \frac{3}{4}\pi) \cos(\xi R - \frac{\pi}{4}) \right) \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R}} \int_{\xi_{max}}^{\infty} \frac{\sin((\xi R - \frac{\pi}{4}) - (\xi - \frac{3}{4}\pi))}{\xi^2} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R}} \int_{\xi_{max}}^{\infty} \frac{\cos(\xi(R-1))}{\xi^2} d\xi$$

Substitution: $\xi' = \xi(R-1) \Rightarrow d\xi = \frac{d\xi'}{R-1} \left| \begin{array}{l} \xi \rightarrow \infty \Rightarrow \xi' \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow \xi_{max} \Rightarrow \xi' \rightarrow (R-1)\xi_{max} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{R^1}} \int_{(R-1)\xi_{\max}}^{\infty} \cos \xi' \frac{(R-1)^2}{(R-1)} \frac{d\xi'}{\xi'^2} \\
 &= \frac{R-1}{\sqrt{R^1}} \int_{(R-1)\xi_{\max}}^{\infty} \cos \xi \frac{d\xi}{\xi^2} \\
 &= \frac{R-1}{\sqrt{R^1}} \left[-\frac{\cos \xi}{\xi} \Big|_{(R-1)\xi_{\max}}^{\infty} - \int_{(R-1)\xi_{\max}}^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \right] \\
 &= \frac{R-1}{\sqrt{R^1}} \left[\frac{\cos((R-1)\xi_{\max})}{(R-1)\xi_{\max}} + \text{Si}((R-1)\xi_{\max}) - \frac{\pi}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Für die praktische Rechnung wird die zweite Funktion des endlichen Brunnens also

$$\begin{aligned}
 \text{(A2.3 - 7)} \quad S(R, T) &= \frac{4}{\pi} \left\{ \int_0^{\xi_{\max}} (1 - e^{-T\xi}) \frac{y_1(\xi) y_0(\xi R) - y_1(\xi) y_0(\xi R)}{y_1^2(\xi) + y_1^2(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R-1}{\sqrt{R^1}} \left[\frac{\cos((R-1)\xi_{\max})}{(R-1)\xi_{\max}} + \text{Si}((R-1)\xi_{\max}) - \frac{\pi}{2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

wobei ξ_{\max}^b den in (A2.3 - 4) genannten Bedingungen genügt.

Das verbleibende Integral von 0 bis ξ_{\max}^b wird numerisch behandelt. Wegen (A2.3 - 6) besitzt der Integrand etwa

$$\text{(A2.3 - 8)} \quad m = \left[1 + \frac{\xi_{\max}(R-1)}{\pi} \right]$$

Vorzeichenwechsel. Daher bietet es sich an, das Integrationsintervall von 0 bis ξ_{\max}^b in eine mindest ebensolche (besser noch höhere) Anzahl von Teilintervallen zu zerlegen. Auf jedem Teilintervall wird dann die Berechnung des Integrales mit gängigen Integrationsroutinen vorgenommen.